

۵ نمونه سوال از سوالات کنکور سراسری ۹۱ گروه تجربی

تست ۱۴۰- ضابطه ی وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

$$y = \frac{|x|-1}{x}, |x| < 1 \quad (۲)$$

$$y = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1 \quad (۱)$$

$$y = \frac{1-|x|}{|x|}, |x| > 1 \quad (۴)$$

$$y = \frac{x}{|x|-1}, |x| > 1 \quad (۳)$$

پاسخ به روش اصلی :

$$x \geq 0 \rightarrow y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow y = x(1-y) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$x < 0 \rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow y = x(1+y) \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1$$

پاسخ به روش ما: بدون نیاز به هیچ فرمولی و صرفا با جایگذاری یه عدد دلخواه مثل $x=1$ در تابع داریم: $f(1) = \frac{1}{2}$ پس طبق مفهوم تابع معکوس $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$ و گزینه ای درسته که به ازای $x = \frac{1}{2}$ عدد ۱ تولید کنه \Leftarrow گزینه ی ۱

تست ۱۴۱- برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\left| \sqrt{4n^2 - 3n + 1} - 2\sqrt{n^2 - 2n} \right|$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

پاسخ به روش اصلی:

$$\sqrt{n^2 - 2n} = \sqrt{(n-1)^2 - 1} \Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \right\rfloor = n-2$$

$$\sqrt{4n^2 - 3n + 1} = \sqrt{(2n-1)^2 + n} \Rightarrow 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right\rfloor = 2n-1$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \right\rfloor = (2n-1) - 2(n-2) = 3$$

پاسخ به روش ما: بدون فکر کردن و با جایگذاری عددی دلخواه و بزرگتر از ۲ مثل $n=3$ در عبارت داریم:

$$n = 3 \rightarrow \left\lfloor \sqrt{36 - 9 + 1} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \sqrt{9 - 6} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{28} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \sqrt{3} \right\rfloor = 5 - 2(1) = 3$$

تقریبا هیچ کاری نکردیم!!

تست ۱۴۴- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟

$$\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴) \qquad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳) \qquad \frac{k\pi}{3} \quad (۲) \qquad \frac{2k\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ به روش اصلی:

باید بدانیم که:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \quad \text{و} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

حال باید بدانیم که:

$$\cos \alpha = \cos x \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos x \rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

پاسخ به روش ما: در روش ما، شما احتیاجی به حفظ کردن حتی یک فرمول مثلثاتی ندارید!

ابتدا در گزینه ها به جای k عدد صفر می داریم، گزینه ها به ترتیب خواهند شد:

$$\pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴) \qquad \frac{\pi}{3} \quad (۳) \qquad ۰ \quad (۲) \qquad ۰ \quad (۱)$$

حالا با امتحان یه عدد دلخواه از گزینه ها مثل $x=0$ در معادله ی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

داریم:

$$x=0 \rightarrow -1 = -1 \Rightarrow ۲ \text{ گزینه } ۱$$

حالا در دو گزینه ی باقیمانده به جای k عدد ۱ گذاشته و اول گزینه ی کوچکتر یعنی گزینه ی ۲ رو در معادله چک می کنیم:

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

پس گزینه ۱ درسته!

تست ۱۴۶- نمودار تابع $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ در حوالی مبدا مختصات چگونه است؟

(۴)

(۳)

(۲)

(۱)

پاسخ به روش اصلی:

$$y = \frac{x^2}{x^2+1} = y' = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 + 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 0$$

حال چون $x=0$ ریشه ی مضاعف مشتق اول است، در نتیجه طول نقطه ی عطف تابع است، یعنی f در $x=0$ دارای مماس افقی است. از طرفی چون در حوالی این نقطه پس از تعیین علامت مشخص می شود که علامت مشتق اول مثبت است، پس تابع در اطراف $x=0$ صعودی است و گزینه ی ۴ درست است.

پاسخ به روش ما: با یه روش خیلی جالب در اطراف $x=0$ داریم:

$$\frac{x^2}{x^2+1} \approx \frac{x^2}{1} = x^2 \rightarrow$$

یعنی ۲۰ ثانیه هم طول نمی کشه...

تست ۱۵۱- اگر $\int \frac{5x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = f(x)(2x\sqrt{x}) + c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۵x - ۳ (۴)

۳x - ۲ (۳)

x - ۲ (۲)

x - ۱ (۱)

پاسخ به روش اصلی:

$$\int \frac{5x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \frac{5x^2}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{3x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{5x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx - \int \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int 5x^{\frac{3}{2}} dx - \int 3x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} = 2x^{\frac{3}{2}}(x - 1) = 2x\sqrt{x}(x - 1) \Rightarrow f(x) = x - 1$$

پاسخ به روش ما: با یه روش خیلی خفن! و با بررسی تابع در حوالی مثلا $x=0$ داریم:

$$\int \frac{5x^2 - 3x}{\sqrt{x}} dx \approx \int \frac{-3x}{\sqrt{x}} = \int -3\sqrt{x} = \int -3x^{\frac{1}{2}} = -3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -2x^{\frac{3}{2}}$$

حالا داریم:

$$-2x^{\frac{3}{2}} = f(x) \times \underbrace{2x\sqrt{x}}_{2x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f(x) = -1 \Rightarrow \text{گزینه ۱}$$

۵ نمونه سوال از سوالات کنکور سراسری ۹۱ گروه ریاضی

تست ۱۰۳- اگر $3^a = A$ باشد، $\log_3^4 A^2$ کدام است؟

(۴) $3 + a^2$

(۳) $2 + a^2$

(۲) $3 + 2a$

(۱) $2 + 2a$

پاسخ به روش اصلی:

$$A = 3^a \Rightarrow \log_3^4 A = a$$

$$\log_3^4 A^2 \Rightarrow \log_3^4 + \log_3^{A^2} = \log_3^2 + \log_3^{A^2} \rightarrow 2\log_3^2 + 2\log_3^A = 2(1) + 2(a) = 2 + 2a$$

پاسخ به روش ما: بدون هیچ گونه فرمولی و با یه عدد گذاری ساده در تساوی داریم:

$$3^a = A$$

$$a = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$\log_3^4 A^2 \rightarrow A = \frac{1}{3} \rightarrow \log_3^4 = 0$$

حالا در حکم داریم:

پس گزینه ای درسته که به ازای $a = -1$ عدد صفر تولید کنه ← گزینه ی ۱

تست ۱۰۴- با ارقام ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی با شرط "رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان" می توان نوشت؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ به روش اصلی: اگر عدد مورد نظر بصورت abc باشد، آنگاه حالت های زیر رخ می دهد:

$$\text{حالت اول: } \begin{cases} b=7 \Rightarrow a=5 & \text{۱ یا ۳ یا ۵} \\ b=5 \Rightarrow a=3 \text{ یا } a=9 & \text{۱ یا ۳ یا ۵} \\ b=3 \Rightarrow a=1 & \text{۱ یا ۳ یا ۵} \end{cases}$$

$$\text{حالت دوم: } \begin{cases} b=7 \Rightarrow a=5 & \text{۱ یا ۳ یا ۵} \\ b=5 \Rightarrow a=3 & \text{۱ یا ۳ یا ۵} \end{cases} \quad a=7$$

$$\text{حالت سوم: } a=5 \Rightarrow b=3, a=1$$

پس مجموعاً می شود ۱۰ حالت.

پاسخ به روش ما: از هر انتخاب سه تایی فقط یه حالت صحیح است، مثلاً با اعداد ۱ و ۳ و ۵ فقط ۵۳۱ قابل قبوله، پس جواب $\binom{5}{3} = 10$ می شه، حال کن!

تست ۱۰۶- اگر $g(x) = 2x - 1$ و $fog(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ به روش اصلی:

$$fog(x) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \rightarrow g(x) = 2x - 1 \rightarrow g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3$$

$$\Rightarrow x = 2 \rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \rightarrow g(x) = 3, x = 2 \rightarrow f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

پاسخ به روش ما: با استفاده از مفهوم $fog(x)$ (و نه فرمول ها و عبارات پیچیده) چون $f(3)$ رو می

خواهیم و ۳ رو g به f می ده، پس:

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

حالا با جایگذاری $x=2$ در تابع $fog(x)$ داریم:

$$fog(2) = \frac{2}{\underbrace{2-3}_{-2}} \Rightarrow f(3) = -2$$

تست ۱۰۷- خلاصه شده ی کسر $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{54}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{3}$

پاسخ به روش اصلی:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x} &= \frac{(\sin 7x - \sin 2x)(\sin 7x + \sin 2x)}{\sin 5x} \rightarrow = \frac{(2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{9x}{2})(2 \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{5x}{2})}{\sin 5x} \\ &= \frac{(2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2})(2 \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{9x}{2})}{\sin 5x} \xrightarrow{\sin 2x} \\ &= \frac{\sin 2(\frac{5x}{2}) \sin 2(\frac{9x}{2})}{\sin 5x} = \frac{\sin 5x \sin 9x}{\sin 5x} = \sin 9x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{54}} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

پاسخ به روش ما: با جایگذاری $x = \frac{\pi}{54} = \frac{180}{54} = \frac{10}{3} = 3.33 \approx 3^\circ$ در عبارت داده شده داریم:

$$\frac{\sin^2 21^\circ - \sin^2 6^\circ}{\sin 15^\circ} \approx \frac{\sin^2 20^\circ - \sin^2 5^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{(0.34)^2 - (0.1)^2}{0.25} = \frac{(0.34 - 0.1)}{0.25} = 0.48 \approx 0.5 = \frac{1}{2}$$

از هیچ فرمولی استفاده نکردیم! ضمناً نحوه ی محاسبه ی $\sin 20^\circ, \sin 5^\circ, \dots$ در کلاس و فقط با یک جمله توضیح داده خواهد شد یعنی کل مثلثات فقط با یک جمله! (به جای ۹۰ فرمول!) حل میشه!

تست ۱۱۵- تابع با ضابطه ی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ دامنه ی $\{x : |x-1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

(۴) نزولی

(۳) صعودی

(۲) مثبت

(۱) منفی

پاسخ به روش اصلی:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow D_f = (-1, 3)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \rightarrow$$

پس تابع f در بازه ی داده شده همواره منفی است.

حال نشان می دهیم که تابع f روی دامنه ی خود غیر یکنوا بودهو لذا گزینه های ۱ و ۳ نیز نادرست

است. از آنجا که $D_f = (-1, 3)$ لذا داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow$$

پاسخ به روش ما: می دونیم که: $|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$

حالا با جایگذاری چند عدد از این بازه در تابع $f(x) = x^2 - 2x - 3$ داریم:

گزینه ی ۱ درسته \Rightarrow گزینه های ۲ و ۳ و ۴ ردند \Rightarrow